

Рекомендации по проверке работ. Решения задач.

Приведенные ниже решения не являются единственно возможными.

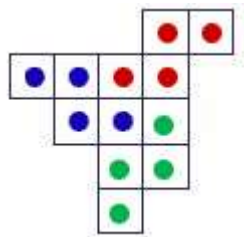
При проверке и оценке решения учитывается верность и полнота решения.

Основные принципы оценивания: каждая задача оценивается от 0 до 7 баллов.

Баллы	Критерии
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное, но содержит несколько ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи
4	Верно рассмотрен один (более сложный) из возможных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
1	Рассмотрены отдельные случаи
0	Решение неверное

4-5 класс

1.



2. Сложим ленту вдвое, потом – еще раз вдвое, потом – еще и еще раз. В результате линии сгибов разделят ленту на 16 равных частей длиной по $144:16 = 9$ см каждая. Отрезается три таких части : $9\text{см}\cdot 3=27\text{см}$.

3. Возможные варианты ответов:

с использованием 8 двоек: $(22 - 2) : 2 \cdot (22 - 2) : 2 = 100$,

с использованием 6 двоек: $(222 - 22) : 2 = 100$.

Комментарий: правильный пример (обоснований не требуется)-7 баллов.

4. 6 пач. + 50 г. = 1 пач. + 100 г. + 200 г.

6 пач. + 50 г. = 1 пач. + 300 г.

6 пач. = 1 пач. + 250 г.

5 пач. = 250 г.

1 пач. = $250:5=50$ (г.)

Ответ: 50 г.

5. Вова ошибся, так как всего было написано четное число записок, а получено $29 \cdot 29$ – нечетное число записок.

6. Заметим, что ноги человека в сумме с «ногами табуретки» будут иметь 5 ног, а с «ногами стула» - 6 ног. Так как число общих ног 39 и

«пятиногие» могут в общем иметь 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 ног,

а «шестиногие» : 6, 12, 18, 24, 30, 36 ног,

то перебором определяем, что «пятиногих» — 3, а «шестиногих» — 4.

То есть в комнате 4 стула и 3 табуретки.

Ответ: 3 табуретки.

6 класс

1. Число квартир, этажей и подъездов может быть только целым числом. Заметим, что число 110 делится на 2, 5 и 11. Следовательно, в доме должно быть 2 подъезда, 5 квартир и 11 этажей.

Ответ: 11.

2. Возможные варианты ответов:

$$(33 - 3) : 3 \cdot (33 - 3) : 3 = 100,$$

$$(333 - 33) : 3 = 100.$$

Комментарий: правильный пример (обоснований не требуется)-7 баллов.

3. Если число делится на 30, то оно также делится на 3 и на 10. Т.к. число делится на 10, то в последнем разряде числа должен быть ноль. Тогда вычёркиваем 41. Остаётся 1415650. Для того, чтобы число делилось на 3 необходимо, чтобы сумма цифр была кратна трём, значит, нужно вычеркнуть цифру 1 или цифру 4. Таким образом, получаем числа 145650, 115650 и 415650.

Ответ: 145650, 115650 или 415650.

4. Общий вес глыб равен $19 \times 1,2 + 47 \times 1,1 = 74,5$ т. Если бы их удалось разложить поровну в два вагона, то вес глыб в каждом равнялся бы $74,5 : 2 = 37,25$ т. Но веса всех глыб кратны 0,1 т, а число 37,25 т не является таковым. Поэтому глыбы требуемым образом разложить нельзя.

Ответ: нельзя.

5. Возьмем любые три палочки. Очевидно, среди них найдутся либо две палочки длины 1 см, либо две палочки длины 3 см. Сделаем их двумя противоположными сторонами прямоугольника. Оставшиеся 98 палочек выложим в один ряд и разделим его ровно посередине, разломав, если нужно, палочку, на которую пришлась эта середина. Получим две другие стороны прямоугольника.

6. Заметим, что если Петя прав, то Юра неправ, и наоборот. Кроме того, если Вася прав, то Миша неправ, и наоборот. Таким образом, в паре Петя – Юра ровно один мальчик сказал правду и в паре Вася – Миша тоже. Получается, что правду сказали ровно двое.

Ответ: двое.

7 класс

1. Так как среди любых 23 грибов хотя бы один – рыжик, то груздей не больше 22. Так как среди любых 24 грибов хотя бы один – груздь, то рыжиков не больше 23. А так как всего в корзине 45 грибов, то груздей ровно 22, а рыжиков ровно 23.

Ответ: 23

2. Поскольку в первых 7 подъездах не меньше 462 квартир, в каждом подъезде не меньше $462 : 7 = 66$ квартир. Следовательно, на каждом из 7 этаже в подъезде не меньше 9 квартир. Пусть на каждой лестничной площадке по 9 квартир. Тогда в первых семи подъездах всего $9 \cdot 7 \cdot 7 = 441$ квартира, и квартира 462 окажется в восьмом подъезде, что противоречит условию. Пусть на каждой площадке по 10 квартир. Тогда в первых семи подъездах $10 \cdot 7 \cdot 7 = 490$ квартир, а в первых шести — 420. Следовательно, квартира 462 находится в седьмом подъезде. Она в нем 42-ая по счету, поскольку на этаже по 10 квартир, она расположена на пятом этаже. Если бы на каждой площадке было по 11 квартир, то в первых шести подъездах оказалось бы $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ квартиры, то есть 462 квартира в шестом подъезде, что противоречит условию. Тем самым, Саша живёт на пятом этаже.

Ответ: 5.

3. Сумма длин периметров всех треугольников и всех четырехугольников равна удвоенной сумме длин трех жирных отрезков плюс периметр большого треугольника. Поэтому сумма длин жирных отрезков равна половине разности суммы периметров всех треугольников и четырехугольников и периметра большого треугольника,

т.е. $(25+20-19)/2=13$.

Ответ: 13.

4. К концу каждого часа объём воды в баке увеличивается на $8 - 3 = 5$ литров. Через 6 часов, то есть в 18 часов, в баке будет 30 литров воды. В 18 часов в бак дольют 8 литров воды и объём воды в баке станет равным 38 литров.

Ответ: 18.

5.1) если $x-1 \geq 0$ (*), то $|x-1|=x-1$ и $|2x-x+1|=4$, $x=3$ или $x=-5$.

Из чисел -5 и 3 условию(*) удовл. число 3.

2) если $x-1 < 0$ (**), то $|x-1|=-x+1$ и $|2x+x-1|=4$, $x=\frac{5}{3}$ или $x=-1$.

Из чисел -1 и $\frac{5}{3}$ условию(**) удовл. число -1 .

Ответ: -1 и 3 .

6. Если число делится на 27, тогда оно делится на 3 и на 9. Заметим, что, если число делится на 9, то оно делится и на 3. Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9. Сумма цифр числа 123456 равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Значит при вычеркивании цифр мы должны добиться, чтобы сумма оставшихся равнялась 18 или 9, т.е. вычеркнуть надо цифры в сумме дающие 3 или 12. Получить сумму 18 вычеркиванием трех цифр не удастся, т.к. наименьшая вычеркнутая сумма цифр:

$1+2+3=6$. Значит вычеркиваем три цифры, дающие в сумме 12: (6,5,1), (6,4,2), (5,4,3)

Если вычеркнуть 6,5,1, то полученное число 234 делится на 9, но не делится на 27.

Если вычеркнуть 5,4,3, то полученное число 126 делится на 9, но не делится на 27.

Если вычеркнуть 6,4,2, то полученное число 234 делится на 9 и делится на 27.

Ответ: 135.

8 класс

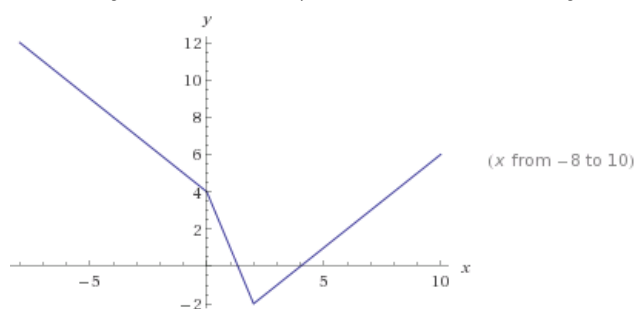
1. Рассмотрим отрезок пути, на котором Маша делает 3 шага, а Яша – 5 шагов. Вместе они делают на таком отрезке 8 шагов. Значит, они прошли $400 : 8 = 50$ таких отрезков. И Маша сделала $50 \cdot 3 = 150$ шагов.

Теперь рассмотрим другой отрезок – на котором уже папа делает 3 шага, а Маша – 5 шагов. Таких отрезков было $150 : 5 = 30$. Отсюда легко вычислить, сколько шагов сделал папа: $30 \cdot 3 = 90$ шагов.

Ответ: 90 шагов.

2. Медиана CK треугольника ABC является также высотой и биссектрисой. Поэтому треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $KL = KM$, $\angle LKM = \angle BKC - \angle BKL + \angle CKM = \angle BKC = 90^\circ$, что и требовалось.

3. График данной функции является ломаной, состоящей из 3-х «участков»: 1) если $x < 0$, то $y = -x + 4$; 2) если $0 \leq x \leq 2$, то $y = -3x + 4$; 3) если $x > 2$, то $y = x - 4$.



4. Пусть Николай сделал сначала x операций второго типа, а затем y операций первого типа. Тогда имеем: $3x - 2y = 0$, количество золотых монет не изменилось,
 $x + y = 50$, медных стало на 50 больше.

Имеем: $x = 20, y = 30$. Тогда серебряных монет стало $3y - 5x = 90 - 100 = -10$ больше, то есть на 10 меньше.

Ответ: на 10.

$$5. \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{1}{6}.$$

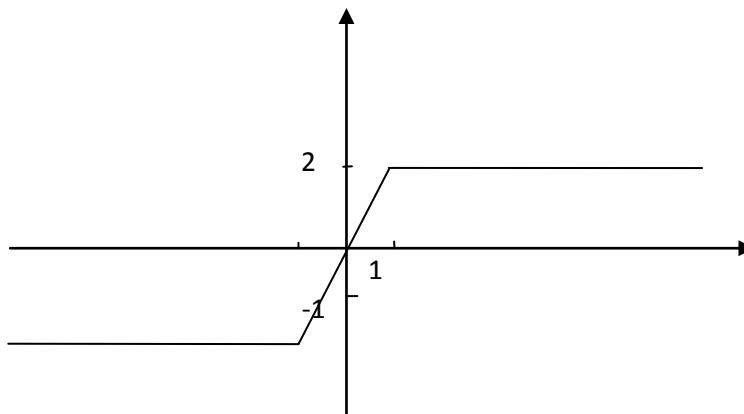
Ответ: $\frac{1}{6}$.

6. Честных министров не больше чем девять: десятка честных министров противоречит условию. С другой стороны, наличие ровно девяти честных министров не противоречит условию.

Ответ: 91

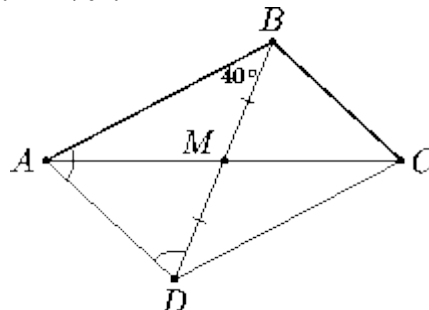
9 класс

1. После извлечения корня: $y(x) = |x+1| - |x-1|$. График данной функции является



ломаной.

2. Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D (см. рис.). Так как $AB = 2BM = BD$, то треугольник ABD – равнобедренный. Следовательно, $\angle BAD = \angle BDA = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.



Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\angle CBD = \angle ADB = 70^\circ$, а $\angle B = \angle ABD + \angle CBD = 110^\circ$.

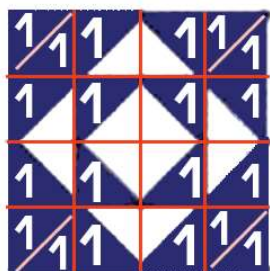
Ответ: 110° .

3. Зеркальное пятизначное число должно иметь вид ABCBA. Раз оно делится на 5, значит, последняя цифра либо 5, либо 0. Но 0 не подходит, поскольку первая цифра (которая равна последней) не может быть 0. Значит, число имеет вид 5BCB5. Например, 52325. Количество таких чисел определяется так: на втором месте можно выбрать 10 цифр (от 0 до 9), на третьем – независимо от второго – тоже 10. Четвертая цифра однозначно определяется – она совпадает со второй, поэтому на количество вариантов не влияет. А две цифры по 10 вариантов в совокупности дают нам $10 \cdot 10 = 100$ вариантов.

5 0 0 0 5, 5 0 1 0 5, 5 0 2 0 5, ..., 5 9 9 9 5 — вторая и третья цифры «перебирают» все варианты от 00 до 99, т.е. ровно 100 вариантов.

Ответ: а) например: 52325; б) 100 чисел.

4. Сделаем рисунок покрупнее и проведем вертикальные и горизонтальные линии, делящие квадрат на 16 маленьких квадратов. После этого сразу становится видно, что каждый квадратик, кроме четырех угловых, разбит на пару треугольников одинакового размера — закрашенного и белого цвета. Угловые квадратики состоят из двух таких же треугольников, только они оба закрашенного цвета.



Остается посчитать закрашенные треугольники — их 20, белые треугольники — их 12 и их отношение — $20:12 = 5:3$.

Ответ: 5:3.

5. Запишем условие в следующем виде: $a + b = a \cdot b = a : b$

Из второго равенства $a \cdot b = a : b$ получаем, что $b^2 = 1$, т.е. $b = +1$ или $b = -1$.

Рассмотрим первое равенство $a + b = a \cdot b$.

При $b = 1$ оно не имеет решений ($1 = 0$). При $b = -1$ получаем $a = 0,5$.

$$a + b = 0,5 - 1 = -0,5$$

$$a \cdot b = 0,5 \cdot (-1) = -0,5$$

$$a : b = 0,5 : (-1) = -0,5$$

Ответ: 0,5 и -1.

6. Честных министров не больше чем девять: десятка честных министров противоречит условию. С другой стороны, наличие ровно девяти честных министров не противоречит условию.

Ответ: 91

10 класс

1.а) Среди десяти данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому все произведение не может равняться нулю.

б) Среди десяти данных чисел 6 нечетных. Значит, на какой-то карточке попадет 2 нечетных числа, и их сумма четная. Поэтому все произведение четно и не может равняться 1.

в) Среди десяти данных чисел 6 нечетных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечетные числа, и сумма чисел на каждой из них четная. Поэтому все произведение делится на 4. Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при наборе карточек: (1;-2), (-2;1), (-3;4), (4;-3), (-5;7), (7;-5), (-8;9), (9;-8), (10;-11), (11;-10).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

2. Пусть угол BAF равен (в градусах) x , тогда угол AEC равен $5x$, соответствующие дуги составляют $2x$ и $10x$, их полуразность составляет $4x$ и равна углу ABC. Отсюда $x=18$ и угол AEC прямой, т.е. AC(=6) – диаметр.

Ответ: $r=3$.

3. Пусть первоначально квас стоил $x\%$ от денежки, а хлеб – $(100-x)\%$. После подорожания

цен на 20%, получим следующий баланс $1,2 \cdot \left(x\% + \frac{(100-x)\%}{2} \right) = 100$. Отсюда $x\% = \frac{200}{3}$.

При двукратном подорожании цен эта величина увеличится в 1,44 раза и достигнет величины 96%, что меньше стоимости денежки.

Ответ: Хватит.

4. Предположим, они расселись требуемым в условии образом. Всего участников 141, а регионов 29, поэтому есть регион Н, представленный на этом форуме не более, чем четырьмя участниками. Делегатов от других регионов не менее 137, поэтому между некоторыми из четырёх участников из Н сидят не менее $137/4=36,25$, то есть не менее 37 человек, среди которых не будет участников из Н – противоречие.

Ответ. Не удастся.

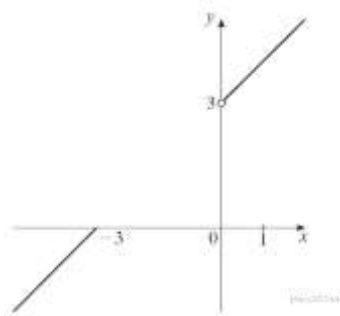
5. Из условия задачи ясно, что правдивые гномы могут любить только сливочное мороженое, а лживые — только шоколадное или фруктовое. Именно поэтому все гномы сказали, что любят сливочное. Заполним табличку — отметим, что должны говорить правдивые и лживые гномы, в зависимости от того, какой сорт им нравится. Правдивый — любит только сливочное, признает это, а про остальные сорта говорит, что не любит. Лживый гном, который любит шоколадное мороженое, скажет «нет» в ответ на второй вопрос, и «да» — в ответ на третий. Если же лживый гном любит фруктовое, то он ответит «да» на вопрос про шоколадное, и «нет» — про фруктовое.

		Сливочное	Шоколадное	Фруктовое
Правдивый	Любит	да	нет	нет
	Говорит	да	нет	нет
Лживый	Любит	нет	да	нет
	Говорит	да	нет	да
Лживый	Любит	нет	нет	да
	Говорит	да	да	нет

Из третьего столбца мы видим, что в любви к фруктовому мог признаться только лжец, который любит шоколадное мороженое. Причем такой среди гномов — всего один. А из второго столбца мы видим, что отрицают любовь к шоколадному мороженому все правдивые гномы и лжецы, которые любят шоколад. Но таких лжецов, как мы уже узнали, всего один. Поэтому на второй вопрос ответили «нет» все правдивые гномы и один лжец. То есть правдивых гномов — половина минус один.

Ответ: 4.

6. Найдём область определения функции: $(-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$. После упрощения получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x + 3$. График изображён на рис.



Прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек при $a \in (0; 3]$.

11 класс

1. Из условия задачи следует, что в школе все парты заняты и свободных мест нет. И за каждой партой сидят девочка с мальчиком, либо девочка с девочкой, либо мальчик с мальчиком. По условию, половина девочек сидят с мальчиками. Рассмотрим вторую половину девочек, которые сидят друг с другом. Пусть они занимают N парт, значит, половина девочек составляет $2N$. Тогда общее число девочек = $4N$. Т.е. количество девочек делится на 4. Предположим, что мы можем пересадить мальчиков нужным образом. И после пересадки ровно половина мальчиков будет сидеть с девочками. Тогда, рассуждая аналогично, мы получаем, что число мальчиков должно составлять $4M$. Т.е. и количество мальчиков должно делиться на 4. Но тогда и общее число учеников (мальчики + девочки) будет делиться на 4. А по условию их 300, что на 4 не делится. Значит, наше предположение о возможности пересадить мальчиков неверно.

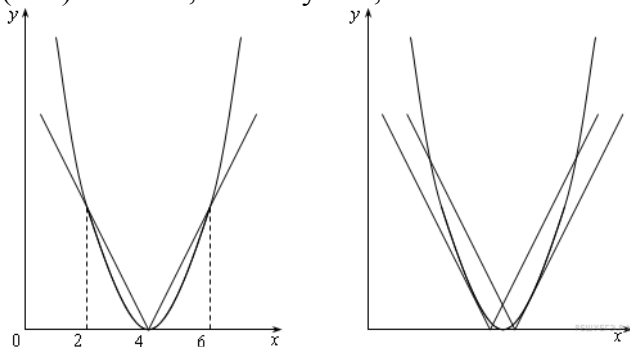
Ответ: мальчиков пересадить нельзя.

2. Запишем уравнение в виде $(x-4)^2 = 2|x-a|$ и рассмотрим графики функций $y = (x-4)^2$ и $y = 2|x-a|$. График первой функции — парабола, график второй функции — угол с вершиной в точке a . Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях:

1. Вершина параболы совпадает с вершиной угла (рис. 1).
2. Одна из сторон угла касается параболы, а вторая пересекает ее в двух точках (рис. 2).

В первом случае $a=4$, и уравнение имеет три корня: 2, 4, 6. Рассмотрим второй случай. Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение $(x-4)^2 = 2x - 2a$ должно иметь единственное решение, поэтому $a=4,5$.

Если параболы касается левая сторона угла, то единственное решение имеет уравнение $(x-4)^2 = 2a - 2x$, поэтому $a=3,5$.



Ответ: 3,5 ; 4; 4,5.

3.а) При любой расстановке разность числа 11 и любого соседнего с ним числа меньше 11. Значит, всегда найдутся хотя бы две разности меньше 11.

б) Например, для расстановки 1,12,2,13,3,14,4,15,16,6,17,7,18,8,19,9,20,10,21,11 все разности не меньше 10.

Ответ: а) нет; б) да.

4. На первый вопрос «Ты Шакал?» Лев и Шакал заведомо скажут «нет». Поэтому узнать Жирафа и не узнать Попугая Ёж может только в одном случае: если Жираф ответит «Да», а Попугай «Нет». То же можно сказать и о втором вопросе «Ты Жираф?» — на него Лев и Жираф скажут «Нет» (Жираф думает, что его спрашивают, Шакал ли он), стало быть, Шакал распознаётся потому, что только он один и сказал «Да». Поскольку ответа первого животного на третий вопрос хватило Ежу для определения всех (а до этого ответа информации не хватало), первым не стоял ни Жираф, ни Шакал (их ответы Ёжик мог предсказать заранее, и они ему ничего нового бы не сказали). Первым не мог стоять и Лев (он на третий вопрос ответил бы «нет»), т. е. первым был Попугай, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Шакал. У нас осталось две возможности расстановки: (1): Попугай, Жираф, Лев, Шакал и (2): Попугай, Лев, Жираф, Шакал. Рассмотрим их. Если бы имел место порядок (1), то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Попугай, ведь он не повторил ответ второго. А тогда после второго опроса (когда он знал и Жирафа, и Шакала) все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы. А вот в случае порядка (2) варианты Попугай, Лев, Жираф, Шакал и Лев, Попугай, Жираф, Шакал действительно не различались бы до последнего вопроса.

Ответ. Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

5. ОДЗ данного уравнения: $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos x \neq 1$. Приведем логарифм в правой части к основанию $\sin x$: $2 - \log_{\sin x} \cos x = 1 / \log_{\sin x} \cos x$. После преобразований получим: $(\log_{\sin x} \cos x - 1)^2 = 0$ или $\log_{\sin x} \cos x = 1$.

После потенцирования будем иметь: $\cos x = \sin x$, $x = \pi/4 + k\pi$.

Среди полученных значений ОДЗ удовлетворяют только решения вида $x = \pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Так как предшествующие 2016 году года рождения могут иметь наибольшую сумму своих цифр 28 в 1999 году, значит мы рассматриваем людей не старше 28 лет, т.е. не позднее 1988 г.р. Можно построить таблицу.

Год рождения	Сумма цифр года рождения	Количество лет в 2016 г
2015	8	1
2014	7	2
.....
2007	9	9
....
2000	2	16
1999	28	17
1998	27	18
....
1989	27	27
1988	26	28

Ответ: в 2007 и 1989.